for minimal surface equation.

Keywords: minimal surface equation, uniform convergence, approximate solution, approximation of equation, estimation of uniform convergence.

УДК 532.537

ПРИЛОЖЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГИДРОМЕХАНИКИ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД К ЧИСЛЕННОМУ ИЗУЧЕНИЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕОДНОРОДНОЙ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ

Д.А. Тукмаков[1]

1 *tukmakovda@imm.knc.ru*; Институт механики и машиностроения Российской академии наук

В работе на основе численного решения уравнений движения многофазных сред получена модель динамики газовзвеси и дрейфа дисперсной фазы в нелинейных волновых полях акустической и электростатической природы, а также разработана математическая модель динамики взвеси частиц с многокомпонентной дисперсной фазой.

Ключевые слова: математическое моделирование, гидродинамика многофазных сред, краевая задача Коши, явная конечно-разностная схема, низкотемпературная плазма с твердой конденсированной фазой.

Модели динамики газовзвесей, состоящих из частиц, несущих электрический заряд, используются для описания ряда процессов, к которым относятся напыление защитных покрытий на окрашиваемые поверхности в электростатическом поле, а также получение на встречных потоках порошкообразных материалов, состоящих из твердых частиц, покрытых слоем полимера [1-3]. Модели электрогазодинамики газовзвесей, наряду с прикладным значением, используются при описании явлений самоорганизации в пылевой плазме, состоящей из заряженных частиц, концентрация которых достаточна для того, чтобы создать электрическое поле, согласованное с меняющейся во времени пространственной конфигурацией газовзвеси [2,3]. Так, в [1,2] рассматривается комплексная плазма, в которой к общему фону ионов, электронов и нейтральных частиц добавлены частицы пыли, которая взаимодействует с окружающей плазмой и приводит к появлению новых физических эффектов. В [4] описаны эксперименты с термодиффузией пыли, движущейся из запыленной области в область с чистым газом. Исследовано распространение пыли при различных коэффициентах диффузии и зарядах частиц и выявлен режим, при котором частицы пыли самоорганизуются в тороидальную структуру. В расчетах, выполненных в данной работе, несущая среда считается электрически нейтральным газом, поскольку рассматриваются медленные процессы, время протекания которых велико по сравнению с периодом плазменных колебаний [2,3]. Дисперсная фаза многофазной смеси состоит из совокупности некоторого количества фракций твердых частиц, при этом каждая фракция отличается объемным содержание в общем объеме многофазной среды, физической плотностью вещества, размером частиц и их теплопроводность. Среда представляет собой электрически заряженную газовзвесь полидисперсного состава, частицы которой находятся под действием силы аэродинамического сопротивления, силы Архимеда, силы присоединенных масс и силы, действующей со стороны электрического поля, которое создано распределенным зарядом газовзвеси. Для описания ее движения применяется система уравнений динамики полидисперсной многоскоростной и многотемпературной газовзвеси со скоростным и температурным скольжением фаз [5]. Система включает в себя уравнения движения несущей среды и дисперсной фазы. Движение несущей среды описывается системой уравнений Навье-Стокса с учетом межфазного силового взаимодействия и теплообмена:

$$\frac{\partial \rho}{\partial tx} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v - \tau_{xy}) = \sum F_{xi} + \sum \alpha_i \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v + p - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p - \tau_{yy}) = \sum F_{yi} + \sum \alpha_i \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}([e + p - \tau_{xx}]u - \tau_{xy} v + \lambda \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}([e + p - \tau_{yy}]v - \tau_{xy} u + \lambda \frac{\partial T}{\partial y}) =$$

$$= -\sum Q_i - \sum (|F_{xi}|(u - u_i) + |F_{yi}|(v - v_i)) + \sum \alpha_i \left(\frac{\partial (pu)}{\partial x} + \frac{\partial (pv)}{\partial y} \right),$$

$$p = (\gamma - 1)(e - \rho(u^2 + v^2)/2), e = \rho(I + (u^2 + v^2)/2), \tau_{xx} = \mu \left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right),$$

$$\tau_{yy} = \mu \left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right), \tau_{xx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), D = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Здесь ρ, u, e, T, λ, μ, γ – плотность несущей фазы, скорости несущей фазы, полная энергия и температура высокотемпературного газа, коэффициенты теплопроводности, вязкости и постоянная адиабаты для несущей газообразной среды, $I = RT/(\gamma - 1)$ внутренняя энергия несущей среды (здесь R – газовая постоянная для разогретого воздуха) [6]; компоненты силы межфазного трения F_{xi}, F_{yi} и тепловой поток с поверхности частицы i-ой фракции дисперсной фазы Q_i определяются законами межфазного взаимодействия. Для описания движения дисперсной фазы используются уравнение сохранения средней плотности дисперсной фазы, уравнение сохранения импульса и уравнение сохранения внутренней энергии [4]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i u_i}{\partial x} + \frac{\partial \rho_i v_i}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i u_i v_i) = -F_{xi} - F_{Exi} - \alpha_i \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial (\rho_i v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i v_i) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i v_i^2) = -F_{yi} - F_{Eyi} - \alpha_i \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial e_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_i u_i) + \frac{\partial}{\partial x}(e_i v_i) = Nu \frac{6\alpha}{(2r)^2} \lambda (T - T_i),$$

$$\rho_i = \alpha \rho_{i0}, e_1 = \rho_i C_{pi} T_i.$$

Здесь α_i, ρ_i , e_i , T_i – объемное содержание, средняя плотность, внутренняя энергия и температура i-ой фракции дисперсной фазы; C_{pi} , ρ_{i0} – удельная теплоемкость и плотность вещества i-ой фракции твердых частиц. Компоненты силы межфазного взаимодейсвия F_{xi} и F_{yi} определяются следующим образом [5,4]:

$$F_{xi} = \frac{3\alpha_i}{8r_i} Cd_i \rho \sqrt{(u-u_i)^2 + ((v-v_i)^2} (u-u_i) + \alpha_i \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) +$$

$$+0.5\alpha_i \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i\frac{\partial u_i}{\partial x} - v_i\frac{\partial u_i}{\partial y} \right) + F_{Exi},$$

$$F_{yi} = \frac{3\alpha_i}{8r_i} Cd_i \rho \sqrt{(u-u_i)^2 + ((v-v_i)^2} (v-v_i) + \alpha_i \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \right) +$$

$$+0.5\alpha_i \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial t} - v_i\frac{\partial v_i}{\partial x} - v_i\frac{\partial v_i}{\partial y} \right) + F_{Eyi}.$$

Составляющие силы Кулона на единицу объема газовзвеси определяются через ее удельный заряд, объемную плотность твердой фазы и напряженность электрического поля:

$$F_{Exi} = -q_0\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad F_{Eyi} = -q_0\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

где q_0 – удельный заряд единицы массы твердой фракции, φ – потенциал электрического поля. Потенциал электрического поля в расчетной области определяется из решения уравнения Пуассона с граничными условиями 2-го рода:

$$\mathrm{div} E = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}, E = -\nabla\varphi\, q = \rho_2 q_0, \rho_2 = \sum \rho_i.$$

В правой части уравнения Пуассона содержится плотность заряда газовзвеси, отнесенная к абсолютной диэлектрической проницаемости несущей среды.

Литература

1. Фортов В. Е., Храпак А. Г., Храпак С. А., Молотков В. И., Петров О. Ф. *Пылевая плазма* // Успехи физики. – 2004. – Т. 174. – № 5. – С. 495–544.

2. Сальянов Ф.А. *Основы физики низкотемпературной плазмы, плазменных аппаратов и технологий.* – М.: Наука, 1997. – 206 с.

3. Богомолова О. Ю., Данилаев М. П. *Параметры течения многофазных газовых потоков в задаче капсулирования субмикронных частиц полимером* // Научно-технический вестник Поволжья. – 2016. — № 3. – С. 25–27.

4. Блейхер Г. А., Кривобоков В. П., Юрьева А. В. *Магнетронное осаждение покрытий с испарением мишени* // Журнал технической физики. – 2015. — № 12. – С. 56–61.

5. Кутушев А.Г. *Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах.* – Санкт-Петербург.: Недра, 2003. – 284 с.

6. Седов Л.И. *Механика сплошной среды.* – М.: Наука, 1984. – Т. 1, Т. 2.

7. Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей.* – М.: Мир, 1991. – 501 с.

8. Утюжеников И. Ф., Музафаров С. В. *Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа* // Мат. моделирование. – 1993. – Т. 174. – № 5. – С. 495–544.

APPLICATION OF MATHEMATICAL MODELS OF HYDROMECHANICS OF MULTIPHASE ENVIRONMENTS TO NUMERICAL STUDYING OF NON-STATIONARY PROCESSES IN NON-UNIFORM LOW-TEMPERATURE PLASMA

D.A. Tukmakov

The mathematical model of quasi-neutral dusty plasma, condensed phase of which has multifraction structure, is presented by the particles having various size and consisting of substances with various physical properties. The offered model of dusty plasma is developed on the basis of the polydisperse multi-speed and multitemperature gas-suspension dynamics theory, taking into account speed and temperature delay of the condensed fractions particles. At the same time, it is supposed that disperse inclusions represent the spherical particles differing in the size and materials which particles consist of, they can have various density and heat conductivity.

Keywords: mathematical model, dynamics of dust plasma, polydisperse structure.

УДК 517.98

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, СОХРАНЯЮЩИЕ СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПОРЯДОК

Е. Турилова[1], Я. Хамхалтер[2]

1 *ekaterina.turilova@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *hamhalte@math.feld.cvut.cz*; Czech Technical University in Prague

В работе исследуются спектральные автоморфизмы, сохраняющие ортогональность на множестве эффектов. Показывается, что любой такой спектральный автоморфизм на AW^*-факторе, не являющемся фактором типа III и I_2, представляет собой композицию функционального исчисления с йордановым $*$-автоморфизмом. Полученный результат можно рассматривать как теорему типа Вигнера.

Ключевые слова: AW^*-алгебра, спектральный порядок, йорданов изоморфизм.

Для C^*-алгебры $\mathscr{A}$ *алгеброй эффектов* будем называть множество

$$E(\mathscr{A}) = \{a \in \mathscr{A} \mid a \geq 0, \|a\| \leq 1\}.$$

AW^*-алгебра, введенная Капланским в [3] как алгебраическая абстракция алгебры фон Неймана, может рассматриваться как C^*-алгебра с единицей, для каждого положительного элемента a которой определен ранговый ортопроектор $r(a)$ (носитель элемента). Более того, для $\lambda \geq 0$ и $a \in \mathscr{A}^+$ определена система ортопроекторов $(E^a_\lambda)_{\lambda \geq 0}$, называемая *спектральным семейством или спектральным разложением a*. Отметим, что для AW^*-алгебры $\mathscr{A}$ алгебра эффектов имеет вид

$$E(\mathscr{A}) = \{a \in \mathscr{A} \mid 0 \leq a \leq 1\}.$$

Определение. *Пусть $\mathscr{A}$ – AW^*-алгебра. Спектральным порядком $\leq_S$ называется отношение частичного порядка на $E(\mathscr{A})$, определяемое следующим образом:*

$$a \leq_S b, \text{ если } E^b_\lambda \leq E^a_\lambda \text{ для любого } \lambda \geq 0.$$